Quitte à considérer, en ce qui concerne les séries, la suite de leurs sommes partielles, on se limitera à la convergence de suites numériques. De plus, on considérera des suites réelles, puisque l'on peut s'y ramener en considérant séparément les parties réelles et imaginaires d'une suite complexe.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers $\alpha\in\mathbb{R}$.

Pour tout n∈ℕ, on pose $e_n = x_n - \alpha$, erreur d'approximation à la $n^{\text{ième}}$ itération.

On suppose que ∀n∈ℕ, $x_n \neq \alpha$.

I. Vitesse de convergence, accélération de la convergence.

A. Vitesse de convergence.

Def.1: Si la suite $\left(\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{CV} \lambda$, on dit que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers α est:

- **lente** pour λ=1
- **géométrique** pour 0<λ<1
- **rapide** pour λ=0. (1)

Exemple 1: (2) **Le nombre e** est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

On a $e_n = e - x_n \underset{\infty}{\sim} \frac{e}{2n}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$. CV lente.

En posant $y_n = x_{2^n}$, on a une CV géom. $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$.

Pté.1: Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un dévt asymptotique de la forme $x_n = \alpha + \beta\lambda^n + o(\lambda^n)$, avec β≠0 et -1<λ<1, alors la CV est géométrique de rapport |λ|.

Remarque: la réciproque est fausse. (3)

Exemple 2: (4) **Séries de Riemann.** La cv de la suite des des sommes partielles d'une série de Riemann:

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\gamma} \xrightarrow{cv} \alpha$ est lente. (γ∈ℝ, γ>1)

B. Point fixe attractif, super-attractif.

Pté.2: Considérons I intervalle fermé de ℝ non réduit à un point, $f \in C^1(I)$ admettant un unique point fixe $\alpha \in \overset{\circ}{I}$ et telle que $0 < |f'(\alpha)| < 1$.

Soit (x_n) la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.

Alors $(x_n) \xrightarrow{cv} \alpha$, et la cv. est géométrique de rapport $|f'(\alpha)|$.(5)

Def.2: On dit que la **convergence** de (x_n) vers α est **d'ordre r** ≥ 1 s'il existe une constante $\lambda > 0$ tq. à l'infini $|x_{n+1}-\alpha| \sim \lambda |x_n - \alpha|^r$. (ou $|e_{n+1}| \sim \lambda |e_n|^r$).

Remarque: dans le cas r=1, on retrouve la cv lente (λ=1)ou géométrique (0<λ<1).

Pté.3: Si la cv de (x_n) vers α est d'ordre r≥1, alors ce réel r est uniquement déterminé. (6)

Pté.4: Avec les notations de la Pté.2, si f est de classe C^r, r≥2, et si ∀k∈{1,..r-1}, $f^{(k)}(\alpha) = 0$, mais $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$, alors la convergence de (x_n) est d'ordre r. (7)

Exemple 3: **Méthode de Newton.** Soient I un intervalle de ℝ, et $g \in C^2(I)$. Supp. que $g(x) = 0$ admette une solution $\alpha \in \overset{o}{I}$ tq. $g'(\alpha) \neq 0$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq. $x_0 \in J = [\alpha-\eta; \alpha+\eta]$, $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$

Si $g''(\alpha) \neq 0$, alors la méthode est d'ordre 2. (8)

Remarque: cv d'ordre r>1 ⇒ cv rapide
(mais la réciproque est fausse) (9)

C. Comparaison des vitesses de convergce.

Def.3: Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv. aussi vers α, avec ∀n∈ℕ, $y_n \neq \alpha$, on dit que la cv. de cette suite est **plus rapide** que celle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, à l'infini, $|y_n - \alpha| = o(|x_n - \alpha|)$

D'où l'idée d'accélérer la cv d'une suite en la remplaçant par une autre suite cv. plus rapidement vers la même limite.

Exemple 2: (4) **Séries de Riemann.** La convergence peut être accélérée en considérant la suite définie par:

$y_n = x_n + \frac{1}{\gamma-1}.\frac{1}{(n+1)^{\gamma-1}}$.

II. Méthode d'accélération de Richardson

A. Dévelop^t asympt. $x_n=\alpha+\beta.\lambda^n+\gamma.\mu^n+o(\mu^n)$

On se place dans le cas où l'on dispose d'un développement asymptotique de la forme :

$x_n = \alpha + \beta\lambda^n + \gamma\mu^n + o(\mu^n)$,

avec $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$, et $0 < |\mu| < |\lambda| < 1$.

La suite (x_n) converge vers α, géométriquement de rapport |λ|.

1° cas. Si l'on connaît explicitement les coefficients β et λ, on peut accélérer la cv. en posant :

$y_n = x_n - \beta\lambda^n$, on a une cv. géo de rapport μ (10).

2° cas . Si l'on connaît seulement λ, on pose :

$y_n = \dfrac{x_{n+1} - \lambda x_n}{1-\lambda}$ on a une cv. géo de rapport μ (10)

Dans les deux cas, on est passé de (x_n) cv vers α, géom^t de rpt |λ| à (y_n) cv vers α, géom^t de rpt |μ|<|λ|.

Exemple 4: **Approximation de π** par la méthode d'Archimède des polygones réguliers. On introduit : $x_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$, pour tout n≥1. Elle cv vers π géométriquement de raison $\dfrac{1}{4}$. On l'accélère en posant $y_n = \dfrac{4x_{n+1} - x_n}{3}$, et on a une cv. géo de raison $\dfrac{1}{16}$.

B. Dévelop^t asympt. $x_n=\alpha+(\beta/n)+(\gamma/n^2)+o(n^2)$

Si on a le développement asymptotique:

$x_n = \alpha + \dfrac{\beta}{n} + \dfrac{\gamma}{n^2} + o\left(n^2\right)$, on pose:

$y_n = x_{2^n} = \alpha + \dfrac{\beta}{2^n} + \dfrac{\gamma}{4^n} + o\left(\dfrac{1}{4^n}\right)$,

ce qui nous ramène au cas précédent.

On a une suite accélératrice en posant: $z_n = 2y_{n+1} - y_n$.

On a alors:

$$\begin{cases} y_n - \alpha \sim \dfrac{\beta}{2^n} \\ z_n - \alpha \sim -\dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma}{4^n} \end{cases}$$

Exemple 1: (2) **Le nombre e** $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

$\left(x_{2^n}\right)$ donne une cv. géométrique de raison $(1/2)$.

Poser $z_n = 2x_{2^{n+1}} - x_{2^n}$, donne une convergence géométrique de raison $(1/4)$

C. Généralisation

Def.4: La **méthode de Richardson** consiste à itérer le procédé précédent dès que l'on dispose d'un développement asymptotique de la forme:

$x_n = \alpha + \sum\limits_{j=1}^{p+1} \beta_j \lambda^n{}_j + o\left(\lambda_{p+1}{}^n\right)$, où p∈ℕ*,

$\forall j \in [\![1; p+1]\!], \beta_j \neq 0$, et $0 < \left|\lambda_{p+1}\right| < \left|\lambda_p\right| < \ldots < \left|\lambda_1\right| < 1$.

Cette méthode est indiquée pour l'étude de sommes de séries numériques de la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$, avec $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^*_+\right)$ quand, dans le DSE, les dérivées succesives de f sont faciles à calculer.

Si l'on connaît les λ_j mais pas les β_j, on élimine ces derniers par le procédé barycentrique vu au A-2°cas (10), c'est-à-dire que l'on introduit les suites $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} x_{n,0} = x_n \\ x_{n,k} = \dfrac{x_{n+1,k-1} - \lambda_k x_{n,k-1}}{1-\lambda_k} \end{cases}$$

Lemme 1: Avec les notation et hypothèses qui précèdent, on a pour tout $k \in [\![0; p]\!]$ le dvt asypmpt.:

$$x_{n,k} = \alpha + \sum_{j=k+1}^{p+1} \beta_{k,j} \lambda_j{}^n + o\left(\lambda_{p+1}{}^n\right) \quad (11)$$

Théorème 1 (de Richardson): Avec les notation et hypothèses qui précèdent, pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, la suite $\left(x_{n,k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α géométriqu^t de raison λ_{k+1}, plus rapidement que $\left(x_{n,k-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $k \in [\![0; p]\!]$, on a:

$x_{n,k} - \alpha \underset{\infty}{\sim} \beta_{k,k+1}\lambda_{k+1}{}^n$, avec $\beta_{k,k+1} = \beta_{k+1}\prod\limits_{j=1}^{k}\dfrac{\lambda_{k+1} - \lambda_j}{1-\lambda_j}$ (12)

Exemple 4: **Approximation de π** . Les suites accélératrices de la méthode de Richardson sont:

$$\begin{cases} x_{n,0} = x_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) \quad (n \geq 1) \\ x_{n,k} = \dfrac{x_{n+1,k-1} - \dfrac{1}{4^k}x_{n,k-1}}{1-\dfrac{1}{4^k}} = \dfrac{4^k x_{n+1,k-1} - x_{n,k-1}}{4^k - 1} \quad (1 \leq k \leq p, n \geq 1) \end{cases}$$

Cas général: Soit f définie sur $I =]-1;1[$ et admettent un DL d'ordre (p+1) en 0:

$f(x) = \alpha + \sum\limits_{j=1}^{p+1}\beta_j x^j + o\left(x^{p+1}\right)$, p∈ℕ*, ∀j, $\beta_j \neq 0$.

Associons à f la suite $x_n = f\left(r^n\right)$, pour n≥1, où r est un réel non nul de]-1;1[. Il vient (dvt asympt), en posant $\lambda_j = r^j$ (on a bien $0 < \left|\lambda_{p+1}\right| < \left|\lambda_p\right| < \ldots < \left|\lambda_1\right| < 1$):

$x_n = \alpha + \sum\limits_{j=1}^{p+1}\beta_j \lambda_j{}^n + o\left(\lambda_{p+1}{}^n\right)$. Les suites accélératrices sont alors:

$$\begin{cases} x_{n,0} = x_n = f\left(r^n\right) \\ x_{n,k} = \dfrac{x_{n+1,k-1} - r^k x_{n,k-1}}{1-r^k} \quad (1 \leq k \leq p) \end{cases}$$

et les coefficients $\beta_{k,k+1}$ sont donnés par:

$$\beta_{k,k+1} = \beta_{k+1}\prod_{j=1}^{k}\frac{r^{k+1} - r^j}{1-r^j} = (-1)^k r^{\frac{k(k+1)}{2}}\beta_{k+1}$$

Ainsi, $\forall k \in [\![0; p]\!]$, $x_{n,k} - \alpha \sim (-1)^k \beta_{k+1} r^{\frac{(k+1)(2n+k)}{2}}$

Exemple 4: Approximation de π .

On a $x_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$. La méthode ci-dessus donne pour les trois premières suites:

$$\begin{cases} x_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) \\ x_{n,1} = \dfrac{4x_{n+1} - x_n}{3} \\ x_{n,2} = \dfrac{16x_{n+1,1} - x_{n,1}}{15} \end{cases} \text{ qui donnent: } \begin{cases} \pi - x_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{\pi^3}{6}\dfrac{1}{4^n} \\ \pi - x_{n,1} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{\pi^5}{5!}\dfrac{4}{16^{n+1}} \\ \pi - x_{n,2} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{\pi^7}{7!}\dfrac{1}{64^{n+1}} \end{cases}$$

Exemple 1: (2) **Le nombre e** $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.

Les trois premières suites de Richardson sont:

$$\begin{cases} x_n = \left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n} \\ x_{n,1} = 2x_{n+1} - x_n \\ x_{n,2} = \dfrac{4x_{n+1,1} - x_{n,1}}{3} \end{cases} \text{ avec: } \begin{cases} e - x_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{e}{2}\dfrac{1}{2^n} \\ e - x_{n,1} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{11e}{24}\dfrac{1}{2^{2n+1}} \\ e - x_{n,2} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{7e}{16}\dfrac{1}{2^{3(n+1)}} \end{cases}$$

La méthode de Richardson s'applique lorsque l'on connaît les paramètres β et λ du développement asymptotique $x_n = \alpha + \beta\lambda^n + \gamma\mu^n + o(\mu^n)$, voire uniquement le paramètre λ.

III. Méthode d'accélération d'Aitken.

La méthode d'Aitken s'applique à des suites de terme général se développant $x_n = \alpha + \beta\lambda^n + o(\lambda^n)$, même si l'on ne connaît explicitement ni β, ni λ.

A. Généralités.

Comme dans la méthode de Richardson, on pose:

$$y_n = \frac{x_{n+1} - \lambda_n x_n}{1-\lambda_n}$$

On suppose que la suite $(x_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} = \lambda \in]-1;1[-\{0\}$, i.e. cv. géo de rais. λ.

On suppose de plus que ∀n∈ℕ, $x_{n+1} \neq x_n$.

Lemme 2: La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : ∀n∈ℕ*,

$\lambda_n = \dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}$ converge vers λ.

Théorème 2: La suite $(y_n)_{n\geq n_0}$ converge vers α plus rapidement que la suite $(x_n)_{\in\mathbb{N}^*}$.

On introduit les opérateurs de Aitken définis par:

$$\begin{cases} \Delta x_n = x_{n+1} - x_n \\ \Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \end{cases}.$$

On a: $y_{n+1} = x_n - \dfrac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$.

Mais pour la programmation de cette méthode, on préfèrera écrire les y_n sous la forme:

$$y_n = x_n + \left(\frac{1}{x_{n+1}-x_n} - \frac{1}{x_n - x_{n-1}}\right)^{-1}$$

B. Point fixe attractif, super-attractif.

a) Approximations successives d'un point fixe attractif α d'une fonction

Soit f suffisament dérivable, dont le coef $\lambda = f'(\alpha)$ est inconnu dans]-1;1[-{0}.
On reprend les hypothèses et notations du I.B.
$x_1 = f(x_0) \neq x_0$, par récurrence (et th. des A.F.) on montre que ∀n∈ℕ, $x_{n+1} \neq x_n$. Un DL à l'ordre 2 donne:

$$x_n - \alpha = f'(\alpha)(x_{n-1}-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2}(x_{n-1}-\alpha) + o\left((x_{n-1}-\alpha)^2\right)$$

Notant $e_n = x_n - \alpha$, $\lambda = f'(\alpha)$ et $\mu = \dfrac{f''(\alpha)}{2}$, il vient:

$e_n = \lambda e_{n-1} + \mu e^2_{n-1} + o(e^2_{n-1})$.

En supposant $\mu = f''(\alpha) \neq 0$, il vient:

$$\frac{y_{n+1}-\alpha}{y_n-\alpha} \underset{\infty}{\sim} \left(\frac{e_n}{e_{n-1}}\right)^2 \sim \lambda^2 = (f'(\alpha))^2.$$

On est passé d'une cv. géométrique de rapport $|f'(\alpha)|$ à une cv. géométrique de rapport $|f'(\alpha)|^2$, donc plus rapide puisque $|f'(\alpha)| < 1$.

b) Cas d'un point fixe super-attractif

Dans ce cas, on a $f'(\alpha) = 0$. Supposons $f''(\alpha) \neq 0$.
Si f suffisament dérivable (C⁴), on a:

$e_n = \lambda_2 e^2_{n-1} + \lambda_3 e^3_{n-1} + \lambda_4 e^4_{n-1} + o(e^4_{n-1})$, où l'on note:

$$\lambda_2 = \frac{f''(\alpha)}{2},\ \lambda_3 = \frac{f^{(3)}(\alpha)}{3!},\ \lambda_4 = \frac{f^{(4)}(\alpha)}{4!}.$$

En posant $y_n = \dfrac{x_{n+1} - \lambda_n x_n}{1-\lambda_n}$ conformément à la méthode d'Aitken, on a: $\dfrac{|y_{n+1}-\alpha|}{|y_n-\alpha|} \sim \dfrac{|f''(\alpha)|}{2}$, et la cv de (y_n) est d'ordre 2 comme celle de (x_n), mais quand même plus rapide (???)

IV. Notes.

(1) C'est le fait de poser λ comme limite de $\left(\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ⇒ 0≤λ≤1.(par l'absurde, poser λ>1).

(2) **Le nombre e.**

Convergence lente:

Qd n→∞, $\frac{1}{n}\to 0$, et $\ln(1+x)\underset{0}{\sim} x$,

donc $x_n = e^{\ln(x_n)} = e^{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)} = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$,

où $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim n.\frac{1}{n}=1$. Donc x_n→e.

$$e_n = e - x_n = e - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e\left(1-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}\right).$$

Or $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n.\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(n^2\right)\right) = 1-\frac{1}{2n}+o\left(n^3\right)$

donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 = -\frac{1}{2n}+o\left(n^3\right)$,

donc $e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1} = 1-\frac{1}{2n}+o\left(n^3\right)\sim 1-\frac{1}{2n}$, donc:

$$e_n \sim e\left(1-(1-\frac{1}{2n})\right)\sim\frac{e}{2n}.$$

Donc $\frac{e_{n+1}}{e_n}=\frac{n}{n+1}\to 1$.

Accélération de convergence: $y_n = x_{2^n}$.

$$e-y_n\sim\frac{e}{2\times 2^n}=\frac{e}{2^{n+1}}.$$

D'où $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$.

Le DL à l'orde 2 de $\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$ au vge de 0 donne le dvt asympt.: $x_n = e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

Comme on cherche à approximer e, les coefs $\beta=-\frac{e}{2}$ et $\gamma=\frac{11e}{24}$ sont inconnus. On considère donc la suite $\left(x_{2^n}\right)$, qui donne une cv. géométrique de raison $\frac{1}{2}$ (en effet $e-x_{2^n}\sim\frac{e}{2^{n+1}}$),

et la suite accélératrice $z_n=\left(2x_{2^{n+1}}-x_{2^n}\right)$ donne une cv. géométrique de raison $\frac{1}{4}$ (en effet $e-z_n\sim\frac{11e}{3}\frac{1}{4^{n+2}}$).

Méthode de Richardson: accélération de convergence:

$e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$ incite à poser $x_n=f\left(\frac{1}{2^n}\right)$, où f est définie sur]-1;1[par: $f(0)=0$ et si $0<|x|<1$,

$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$. f est indéf[t] dérivable sur]-1;1[par composition de $\frac{\ln(1+x)}{x}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$ et de l'exponentielle. Elle admet donc des DL de ts ordres en 0, et à l'ordre 3 on a:

$$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{16}x^3+o\left(x^3\right).$$

On utilise Richardson avec $r=\frac{1}{2}$, il vient:

$$\begin{cases} x_{n,0}=x_n=\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n} & (n\geq 0)\\ x_{n,k}=\frac{2^k x_{n+1,k-1}-x_{n,k-1}}{2^k-1} & (k\geq 1)\end{cases}$$

Il vient alors: $x_{n,k}-e\underset{\infty}{\sim}(-1)^k\beta_{k+1}\frac{1}{2^{(2n+k)\frac{k+1}{2}}}$,

d'où les résultats proposés.

(3) Considérer les suites $\left(n\lambda^n\right)$ ou $\left(\frac{\lambda^n}{n}\right)$.

(4) **Les sommes de Riemann:** $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^\gamma}\xrightarrow{cv}\alpha$.(γ∈ℝ, γ>1)

Convergence lente:

Pour n≥1, l'erreur d'approx. à la n° itération est donnée par:

$$e_n=\alpha-x_n=\alpha-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\gamma}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^\gamma}\qquad\text{(reste d'ordre n).}$$

Or pour tout k∈ℕ*:

∀t∈[k;k+1], $\frac{1}{(k+1)^\gamma}\leq\frac{1}{t^\gamma}\leq\frac{1}{k^\gamma}$ (car γ>1)

Donc $\frac{1}{(k+1)^\gamma}\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{t^\gamma}dt\leq\frac{1}{k^\gamma}$ (car [(k+1)-k] = 1)

On somme sur k, de k = n à k = ∞. ∀n≥2, il vient:

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^\gamma}\leq\sum_{k=n}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^\gamma}dt\leq\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^\gamma}$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^\gamma}\leq\int_n^{\infty}\frac{1}{t^\gamma}dt\leq\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^\gamma}$$

$$e_n\leq\int_n^{\infty}\frac{1}{t^\gamma}dt=\frac{1}{\gamma-1}.\frac{1}{n^{\gamma-1}}\leq e_{n-1}$$

$(\gamma-1)e_n\leq\frac{1}{n^{\gamma-1}}\leq(\gamma-1)e_{n-1}$ pour tout n≥2.

Par suite, ∀n≥1, $\frac{1}{(n+1)^{\gamma-1}} \leq (\gamma-1)e_n \leq \frac{1}{n^{\gamma-1}}$. (*)

$$\frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\gamma-1}} \leq e_n \leq \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{n^{\gamma-1}}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\gamma-1}}\right)}{\left(\frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{n^{\gamma-1}}\right)} \leq \frac{e_n}{\left(\frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{n^{\gamma-1}}\right)} \leq 1$$

$$\underbrace{\frac{n^{\gamma-1}}{(n+1)^{\gamma-1}}}_{\to 1} \leq \frac{e_n}{\left(\frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{n^{\gamma-1}}\right)} \leq 1$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e_n}{\left(\frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{n^{\gamma-1}}\right)} = 1$, i.e. $e_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{n^{\gamma-1}}$

D'où $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1}{(\gamma-1)}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\gamma-1}}\times(\gamma-1).n^{\gamma-1} \to 1$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$, la CV est lente.

Accélération de la convergence.

De (*), et divisant par (γ-1) et en soustrayant le 1° membre, on déduit:

$$\forall n\geq 1,\quad 0 \leq \underbrace{e_n - \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\gamma-1}}}_{\alpha-y_n} \leq \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{(n+1)^{\gamma-1}-n^{\gamma-1}}{n^{\gamma-1}(n+1)^{\gamma-1}}$$

Donc en posant $y_n = x_n + \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\gamma-1}}$, on a:

$y_n \to \alpha$, et ∀n≥1: d'après l'inégalité précédente,

$$\alpha - x_n \geq \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\gamma-1}}$$

$$\frac{1}{\alpha-x_n} \leq (\gamma-1)(n+1)^{\gamma-1}$$

et aussi: $\alpha - y_n \leq \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{(n+1)^{\gamma-1}-n^{\gamma-1}}{n^{\gamma-1}(n+1)^{\gamma-1}}$.

D'où: $0 \leq \frac{\alpha-y_n}{\alpha-x_n} \leq \frac{(n+1)^{\gamma-1}-n^{\gamma-1}}{n^{\gamma-1}} \underset{\infty}{\sim} \frac{\gamma-1}{n} \xrightarrow{\infty} 0$

(5) Le point fixe est attractif (stable) si |f'(α)|<1, quasi-stable si |f'(α)|=1, et instable (répulsif) si |f'(x)|>1. Cf.201.

Mq la suite (x_n) est bien définie:

Avec les hypothèses proposées, $\exists\eta>0$ tq le voisinage de α: $J=[\alpha-\eta;\alpha+\eta]$ soit stable par f. On peut donc définir, pour tout $x_0\in J$, la suite $x_{n+1}=f(x_n)$ d'approximations successives de α.

Or f est contractante d'après **l'inégalité des A.F**, donc la suite (x_n) cv→α. (Cf.201)

Mq. si $x_0\neq\alpha$, alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\neq\alpha$ (par récurrence).

Supposons ceci vrai pour n≥0.

th. des acc. finis(Egalité): *Pour toute fonction réelle d'une vble réelle f:* $[(x_n;\alpha)]\subset J=[\alpha-\eta;\alpha+\eta]\to\mathbb{R}$, *continue sur* $[(x_n;\alpha)]$ *et dérivable sur* $](x_n;\alpha)[$, $\exists c_n\in](x_n;\alpha)[$ *vérifiant :*

$$f'(c_n) = \frac{f(x_n)-f(\alpha)}{x_n-\alpha} = \frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}$$

Donc $x_{n+1}-\alpha = f(x_n)-f(\alpha) = (x_n-\alpha)f'(c_n)$

avec $x_n\neq\alpha$ et $f'(c_n)\neq 0$, par continuité de f', qui est ≠0 en α. Donc $x_{n+1}-\alpha\neq 0$, i.e. $x_{n+1}\neq\alpha$.

Vitesse de convergence:

Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $c_n\in](x_n;\alpha)[$, et $x_n\to\alpha$, on a $(c_n)\to\alpha$.

Donc, par continuité de f', on a $f'(c_n)\to f'(\alpha)$,

et par suite:

$$\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right| = |f'(c_n)| \to |f'(\alpha)|$$

D'où la CV géométrique de rapport |f'(α)|.

(6) Par l'absurde, on en suppose deux, λ et μ, on a :

$|e_{n+1}|\sim\lambda|e_n|^r$ et $|e_{n+1}|\sim\mu|e_n|^s$ avec s>r≥1(rôles sym)

on fait le rapport: $1\sim\frac{\lambda}{\mu}|e_n|^{r-s}$ donc $|e_n|^{s-r}\sim\frac{\lambda}{\mu}>0$,

ce qui contredit $(e_n)\to 0$ car (x_n) cv.

(7) **Taylor-Lagrange** à l'ordre r:

$\exists c_n\in](x_n;\alpha)[$ tq:

$$f(x_n) = f(\alpha) + \sum_{p=1}^{r-1}\frac{(x_n-\alpha)^p}{p!}\underbrace{f^{(p)}(\alpha)}_{0} + \frac{(x_n-\alpha)^r}{r!}f^{(r)}(c_n)$$

$x_{n+1}-\alpha = \frac{(x_n-\alpha)^r}{r!}f^{(r)}(c_n)$, où $c_n\to\alpha$

D'où: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^r} = \frac{|f^{(r)}(\alpha)|}{r!} > 0$, cv d'ordre r.

(8) **Méthode de Newton:** Le nombre η>0 est choisi de telle sorte que la suite soit bien définie, et convergente vers α.

Comme g est C^2, f définie par $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$ est C^1 sur J, avec $f'(x) = \frac{g(x).g''(x)}{(g'(x))^2}$.

(xn) donne une suite d'approximations successives de f.

On a g(α)=0 ⇒ f'(α)=0.

Si de plus g''(α)≠0, il vient:

$$f'(x) = \frac{g(x).g''(x)}{g'(x)^2} \Rightarrow f''(x) = \left[\frac{g(x)}{g'(x)}\cdot\frac{g''(x)}{g'(x)}\right]'$$

$$f''(\alpha)=\left[\frac{g(\alpha)}{g'(\alpha)}\right]'.\left[\frac{g''(\alpha)}{g'(\alpha)}\right]+\left[\frac{\cancel{g(\alpha)}}{g'(\alpha)}\right].\left[\frac{g''(\alpha)}{g'(\alpha)}\right]'$$

$$=\frac{g'(\alpha).g'(\alpha)-\cancel{g(\alpha)}.g''(\alpha)}{g'(\alpha)^2}\times\frac{g''(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

$$f''(\alpha)=\frac{g'(\alpha)^2.g''(\alpha)}{g'(\alpha)^3}=\frac{g''(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

Par ailleurs, un développement de **Taylor-Young** à l'ordre 2 de f donne:

$$f(x_n)=f(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^1}{1!}\cancel{f'(\alpha)}+\frac{(x_n-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)$$
$$+o\left((x_n-\alpha)^2\right)$$

D'où: $x_{n+1}-\alpha=\dfrac{(x_n-\alpha)^2}{2}f''(\alpha)+o\left((x_n-\alpha)^2\right)$

et par suite: $\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2}=\dfrac{f''(\alpha)}{2}+\underbrace{o\left((x_n-\alpha)^2\right)}_{\to 0}$

Finalement, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|}=\dfrac{|f''(\alpha)|}{2}=\dfrac{|g''(\alpha)|}{2|g'(\alpha)|}$.

Donc la méthode est d'ordre 2.

(9) La cv d'ordre r donne $\left|\dfrac{e_{n+1}}{e_n}\right|\sim\lambda|e_n|^{r-1}\xrightarrow{cv}0$, i.e. la cv est rapide. pour la réciproque, la suite $x_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ est un contre-exemple.

(10)

<u>1° cas</u> : $x_n=\alpha+\beta\lambda^n+\gamma\mu^n+o(\mu^n)$, accélérée en posant: $y_n=x_n-\beta\lambda^n$. Cette suite (y_n) cv bien vers α, et on a : $y_n-\alpha\sim\gamma\mu^n$, donc la cv. est géo de rpt μ.

De plus, $\dfrac{y_n-\alpha}{x_n-\alpha}\sim\dfrac{\gamma}{\beta}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^n\to 0$, i.e. ($y_n$) cv. plus vite que ($x_n$) vers α.

<u>2° cas</u> : $x_n=\alpha+\beta\lambda^n+\gamma\mu^n+o(\mu^n)$, connaissant seulement λ. On définit le barycentre de (x_n; -λ) et (x_{n+1} ;1), pour éliminer le terme β^n.

En effet, on a :

$$\begin{cases}x_{n+1}=\alpha+\beta\lambda^{n+1}+\gamma\mu^{n+1}+o(\mu^{n+1})\\ x_n=\alpha+\beta\lambda^n+\gamma\mu^n+o(\mu^n)\end{cases}$$

D'où : $x_{n+1}-\lambda x_n=(1-\lambda)\alpha+\mu^n\left((\mu-\lambda)\gamma+o(1)\right)$.

On pose donc $y_n=\dfrac{x_{n+1}-\lambda x_n}{1-\lambda}$, qui →α.

On a $y_n-\alpha=\mu^n\left(\dfrac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\gamma+o(1)\right)\sim\dfrac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\gamma\mu^n$

Et $\dfrac{y_n-\alpha}{x_n-\alpha}\sim\dfrac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\dfrac{\gamma}{\beta}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^n\to 0$, donc ($y_n$) cv. plus vite que ($x_n$) vers α.

On est passé de (x_n) cv vers α, géom^t de rpt |λ| à (y_n) cv vers α, géom^t de rpt |μ|<|λ|.

Avec ce choix de (y_n), en sachant seulement que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=\lambda$, avec 0<|λ|<1, on a toujours :

$$\frac{y_n-\alpha}{x_n-\alpha}=\frac{\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}-\lambda}{(1-\lambda)}\to 0$$, i.e. la cv de (y_n) vers α est plus rapide que celle de (x_n).

(11) Par récurrence finie sur k.

(12) Comme $0<|\lambda_{p+1}|<|\lambda_p|<\ldots<|\lambda_1|<1$ et d'après le lemme précédent, on a pour tout $k\in[\![1;p]\!]$:

$x_{n,k}-\alpha\underset{\infty}{\sim}\beta_{k,k+1}\lambda_{k+1}^{\ n}$, donc:

$\dfrac{x_{n,k}-\alpha}{x_{n,k-1}-\alpha}\sim\dfrac{\beta_{k,k+1}}{\beta_{k-1,k}}\left(\dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^n\to 0$, donc la cv. est plus rapide.